ным двум гипотезам о плоскости, 4) к гипотезе о замкнутых контурах (или поверхностях). Существенные пункты этих гипотез он указывает в своих определениях, постулатах и аксиомах, которые содержат сверх того объяснение употребляемых терминов, а также, в аксиомах 1—3 и 8, гипотезы, касающиеся теории величин вообще. Эти последние не ограничиваются только изложением терминов, но содержат также необходимую для построения настоящей теории величин гипотезу о неизменчивости и изменчивости величин от деления, за которым следует сложение целиком или частично полученных таким образом долей.

Благодаря ясности и прозрачности важнейших употребляемых в „Началах" геометрических аксиом основные принципы воздвигнутой на них геометрии могли стать отличным исходным пунктом для современных исследований о „значении (portée) отдельных гипотез и их взаимной независимости". Действительно, если они независимы друг от друга, то можно сохранить некоторые из них и делать вывод только из них, пренебрегая прочими гипотезами. Таким путем получают некоторую обобщенную геометрию, ибо доказанные в этом случае теоремы имеют силу как для „пространства", удовлетворяющего еще и другим гипотезам, так и для „пространств", не удовлетворяющих им. Эти теоремы могут найти также в определяемом гипотезами Эвклида пространстве другое приложение: так, например, можно заменить прямые линии известными кривыми, характеризуемыми с помощью некоторых свойств обыкновенной прямой линии, свойств, присущих не специально только прямым линиям, но еще и другим линиям.

Однако наиболее важное из таких обобщений — *проективная геометрия* — возникла, собственно говоря, не из размышлений над аксиомами. Действительно, большинство теорем проективной геометрии имеет своим источником обобщения, возникшие в области геометрии, основанной на всех гипотезах Эвклида. Но, по существу, эта геометрия свободна от некоторых из этих гипотез, и поэтому ее можно построить с самого начала без них.

В проективной геометрии удаляют аксиому о перемещении (фигур) и вытекающую из нее теорию геометрических величин; благодаря этому обходятся также, по крайней мере, до тех пор, пока проективная геометрия не создает себе своего собственного понятия о перемещении, а также о величинах — обходятся и без общих понятий о величинах, устанавливаемых в остальных аксиомах Эвклида. Но зато здесь принимают во внимание гипотезы, заключенные в постулатах, причем, однако, отвлекаются от содержащихся в них заимствований из теории величин. Благодаря этому отпадает с самого начала третий постулат о нахождении (détermination) круга, определяемого тем свойством, что его радиус обладает неизменной величиной, а затем отпадают ограничения пятого постулата, на место которого становится следующий постулат: две прямые линии одной и той же плоскости пересекаются всегда в одной точке.

Можно, однако, избегнуть прямого противоречия с геометрией, в которой пользуются всеми гипотезами Эвклида, или с „эвклидовой геометрией", допустив, что параллельные прямые этой последней пересекаются в бесконечности. Благодаря тому, что проективная геометрия не интересуется вопросом: бесконечно далеки или нет точки пересечения, ей удается охватить как эвклидову геометрию, так и неэвклидову, о которой речь будет ниже.

В проективной геометрии прямая линия обладает теми же свойствами, что и в эвклидовой геометрии, за исключением свойства перемещения, в силу которого одну прямую можно заставить совпасть с другой прямой; свойства плоскости в проективной геометрии, как и в эвклидовой, связаны со свойствами прямых: в ней сохраняются обе гипотезы, относящиеся к нахождению (détermination) плоскости. Так как в ней нельзя уже строить на аксиоме перемещения, а только на названных двух гипотезах, то ясно, что для развития проективной геометрии независимым образом и без предварительного знания эвклидовой геометрии необходимо начать с соображений стереометрического порядка, позволяющих пользоваться этими гипотезами. Что касается эвклидовой гипотезы о замкнутых контурах, то она, оказывается, не независима от опущенных гипотез, поэтому ее нельзя оставить в проективной геометрии. Наоборот, в этой геометрии, в плоскости существуют замкнутые линии двух родов, из которых одни пересекают прямую в четном числе точек (или ни в одной точке), другие — в нечетном числе.

В противоположность проективной геометрии источником так называемой *неэвклидовой геометрии* являются как раз размышления над эвклидовыми гипоте-